



TITLE:

Maximal edge-traversal time in First Passage Percolation(Abstract_要旨)

AUTHOR(S):

Nakajima, Shuta

CITATION:

Nakajima, Shuta. Maximal edge-traversal time in First Passage Percolation. 京都大学, 2019, 博士(理学)

ISSUE DATE:

2019-03-25

URL:

<https://doi.org/10.14989/doctor.k21543>

RIGHT:

許諾条件により本文は2019-12-17に公開

京都大学	博 士（理 学）	氏名	中島 秀太
論文題目	Maximal edge-traversal time in First Passage Percolation (ファーストパッセージパーコレーションの最大辺移動時間)		
(論文内容の要旨)			
<p>与えられたグラフの各辺に非負の確率変数を割り当て、これを各辺の通過時間と見なしてグラフ上の二点間を移動する最短時間を考察する問題をファーストパッセージパーコレーションの問題（最速浸透問題）という。物理的には例えば多孔質のような媒質の中を液体が浸透していくときの到達領域の時間発展を記述するモデルと考えることができ、数学的にはHammersleyとWelshにより1965年に定式化された。これは確率変数の和の最適化問題という側面を持ち、とくに古典的な独立確率変数の和やMarkov過程を考える状況に比べてはるかに多くの確率変数に依存する量を対象としているために本質的に新しい課題を提供し、確率論の理論の発展に寄与してきた。</p> <p>最速浸透問題は標準的には整数格子の上で考えられ、そのとき浸透領域の形状が時間の経過とともに極限形状に収束するという大数の法則に相当する結果は古くから知られている。次に自然に問題となるのは浸透領域の境界の揺らぎであるが、こちらははるかに難しく極めて原始的なことしか分かっていない。例えば3次元以上では境界の揺らぎが発散するかどうか最近まで分かっていなかった。一方でKardar, Parisi, Zhangによるスケーリング関係式に代表されるように、境界の揺らぎが最適経路の路としての振る舞いと関係しているということが徐々に分かってきている。</p> <p>このような背景の下、本論文では最適経路の振る舞いを理解することを目指して「最適経路が通った辺の通過時間の最大値」が研究されている。この問題についてはvan den BergとKestenによる1993年の先行研究があり、そこでは終点が遠くなる極限においては通過時間の分布が非有界である限り最適経路上の通過時間の最大値は発散するという、直観に反する興味深い結果が証明されている。本論文の主結果はPareto分布やWeibull分布という代表的な確率分布のクラスに対して、最適経路上の通過時間の最大値を定数倍の誤差を除いて決定したものである。</p> <p>上からの評価の証明は、基本的に通過時間の大き過ぎる辺に対してはより良い迂回路が見つかることを示すことによって行われる。迂回路はそのような辺を囲む球の表面から探すのであるが、そのためにCranston, Gauthier, Mountfordが示した最速浸透時間の最大偏差原理を拡張した評価が援用される。この拡張自体も興味ある結果である。</p> <p>下からの評価の証明はずっと込み入っているので、正確さを多少犠牲にして方針を述べる。最適経路が通った辺の通過時間の最大値がMより大きいことを示したいとする。まず最適経路に沿ったいくつかの領域で媒質を独立なコピーに取り替える。この操作は最速浸透時間の期待値を不変にする。一方でこの取り替えにおいて低い確率ではあるが「通過時間がM以上の辺を通ることで最速浸透時間が減少する」ような媒質が実現され、このとき通過時間をMで切断したときの最速浸透時間は元のものより小さくなる。さらに取り替えを実行できる場所が数多く存在することを用いると、切断が実は最速浸透時間の期待値を大きく変えることが導かれる。これとよく知られた最速浸透時間の期待値からのずれは小さいことを示すいわゆる「測度の集中」を組み合わせることで、実際には最速浸透時間そのものが切断によって変化することが結論され、最適経路は大きな通過時間を持つ辺を通過していたことが分かるのである。</p>			

(続紙 2)

(論文審査の結果の要旨)

本論文は最速浸透問題における中心的な問題の一つである最適経路に沿った辺の通過時間の分布について新たな知見を与えるものである。Van den BergとKestenの先行結果は一見すると最適経路が通過時間の小さな辺を選んで通るという直観に反しており、このような現象をよりよく理解することは最適経路の振る舞いを理解することに役立つと思われる。実際に当該分野をリードするAuffinger, Damron, Hansonによって著された、この問題の50周年を記念する「50 years of first passage percolation」という書籍の中では、本論文で扱われた問題が未解決問題として挙げられていた。本論文の主結果は古典的な独立確率変数の最大値に関する結果に近い精度で解決するものであり、問題の複雑さを考慮すると極めて精密な結果と言える。分布の末尾に関する若干の仮定がおかれているが、極値分布理論において標準的なものであり、強い制限ではない。

上からの評価においては、最速浸透時間の大量偏差原理が重要な役割を果たしている。辺通過時間の分布が十分早く減衰する場合にはCranston, Gauthier, Mountfordによる研究があるが、本論文の一般性で議論を進めるにはより一般の状況に拡張する必要がある。これはスピングラスの平均場モデルの一つであるgeneralized random energy modelに着想を得た議論で示されており、それ自体興味深い結果である。

次に下からの評価については、期待値に注目して媒質の取り替えを用いるのはvan den BergとKestenのアイデアであるが、求める精度の評価を得るためには「通過時間が大きい辺を通ることで最速浸透時間が減少する」ような媒質が実現する確率を下から評価する必要がある。これは実際にそのような媒質を作ってみせることによって実行されるのであるが、空間次元と辺通過時間の分布に応じて極めて精緻な構成を行う必要がある。

以上のように本論文は当該分野の一つの重要な問題を解決する価値の高いものであり、さらにその方法からは幅広い知見と確率論的にも離散幾何的にも複雑な議論を遂行する能力が認められる。実際に二篇の参考論文においても、本論文の中核となったvan den BergとKestenのアイデアをさらに発展させることで、浸透領域の境界の揺らぎの発散や最適経路の形状に関する重要な結果が示されている。

なお中島秀太氏の学位はKTGU数学系サブユニットが進めるスーパーグローバルコースによる学位となる予定であることを附言しておく。本論文はスーパーグローバルコースの規定に従い、副指導教員であるBolthausen教授にも査読を依頼した。同教授は本論文を非常に高く評価し、学位論文に十分に値するものであると報告された。

よって本論文は博士（理学）の学位論文として価値あるものと認める。また平成31年1月10日、論文内容とそれに関連した事項について試問を行った結果、合格と認めた。

要旨公表可能日：即日